

Title	2層流体の表面波と界面波の相互作用に関する数値的研究 (非線形波動現象の数理と応用)
Author(s)	田中, 光宏; 若山, 恭一
Citation	数理解析研究所講究録 (2014), 1890: 73-84
Issue Date	2014-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/195779
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

2 層流体の表面波と界面波の相互作用に関する数値的研究

岐阜大学 工学部 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

Faculty of Engineering, Gifu University

岐阜大学 工学部 若山恭一 (WAKAYAMA Kyoichi)

Faculty of Engineering, Gifu University

1 はじめに

自然界には、密度の異なる 2 つの流体が層を成す、いわゆる 2 層流体系が広く存在している。例えば真水がより比重の大きい海水 (塩水) の上に流れ込む河口域などはその典型的な例である。多くの湖や入り江、鉱山の廃石池などにおいては、高濃度のサスペンション粒子を含む泥質流体 (fluid mud) の巻き上がりによる再懸濁が重要な問題になっている。この再懸濁の主要原因の一つは、泥質流体層とその上の水の層との界面に、表面波との相互作用によって界面波が励起されることによるものと考えられている。その他にも、低緯度海域の比較的浅い水深に発生する温度躍層に沿う波動や、温帯の多くの湖で見られる「静振」(seiche) など、2 層流体における界面波やそれらの表面波との相互作用は、自然界における広汎な波動現象に重要な影響を及ぼしている。

一般に波と波の非線形相互作用においては、共鳴相互作用が本質的に重要な役割を果たすことが知られている。Ball[1] 以来、表面波と界面波の間には 2 種類の 3 波共鳴相互作用 (Class1 と Class2) が可能であることが古くから知られていた。Class1 は反対方向に伝播する 2 つの表面波と 1 つの界面波の間の共鳴、Class2 は反対方向に伝播する 2 つの界面波と一つの表面波の間の共鳴であり、同一方向へ伝播する複数の表面波を含むタイプは知られていなかった。しかし最近 Alam[2] によって、同一方向へ伝播する 2 つの表面波と一つの界面波の間にも 3 波共鳴相互作用 (Class3) が可能であることが示された。風成の表面波はほぼ同一方向に伝播するのが自然であり、その意味でこの Class3 の 3 波共鳴は、表面波と界面波の間のエネルギー輸送にとって、もっとも重要な共鳴相互作用となる可能性が高い。

単層流体に対する表面重力波の分散関係は 3 波共鳴の存在を許さない。[3] したがって波列間の共鳴は、より高次の 4 波相互作用からしか起こらず、このため波数空間におけるエネルギー輸送およびそれに伴うスペクトル変化は非常に遅いとされている。しかし新たに見出された Class3 の 3 波共鳴相互作用は、一つの界面波を仲介することにより、同一方向に伝播する表面波の間のエネルギー輸送が、3 波共鳴の時間スケールで起こる可能性を示唆している。

このような背景から、本研究ではまず 2 層流体系を対象とした直接数値シミュレーションコードを開発し、その後それを用いて、表面波と界面波の間の 3 波共鳴相互作用 (特に Class3 共鳴) がもたらすスペクトル変動について数値的に検討する。

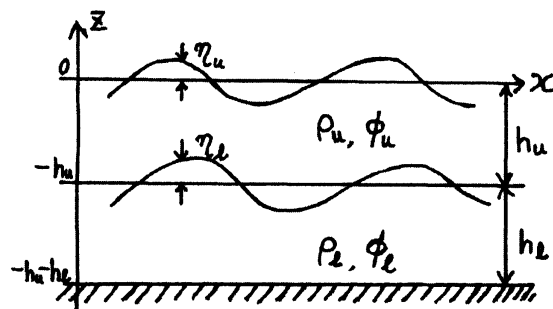


図 1: 2 層流体系

2 2層流体系

2.1 支配方程式

流体は非圧縮・非粘性，運動は断面2次元のポテンシャル流，底は水平，2つの流体は交じり合わない，表面においても界面においても表面張力の効果は重力の効果に比べて無視できると仮定する．このとき，2層流体系の運動を支配する方程式および境界条件は以下のようになる（図1参照）：

$$\nabla^2 \phi_u = 0, \quad -h_u + \eta_l < z < \eta_u, \quad (1a)$$

$$\nabla^2 \phi_l = 0, \quad -h_u - h_l < z < -h_u + \eta_l, \quad (1b)$$

$$\eta_{u,t} + \eta_{u,x} \phi_{u,x} - \phi_{u,z} = 0, \quad z = \eta_u, \quad (1c)$$

$$\phi_{u,t} + \frac{1}{2} (\phi_{u,x}^2 + \phi_{u,z}^2) + g\eta_u = 0, \quad z = \eta_u, \quad (1d)$$

$$\eta_{l,t} + \eta_{l,x} \phi_{u,x} - \phi_{u,z} = 0, \quad z = -h_u + \eta_l, \quad (1e)$$

$$\eta_{l,t} + \eta_{l,x} \phi_{l,x} - \phi_{l,z} = 0, \quad z = -h_u + \eta_l, \quad (1f)$$

$$\rho_u \left[\phi_{u,t} + \frac{1}{2} (\phi_{u,x}^2 + \phi_{u,z}^2) + g\eta_l \right] - \rho_l \left[\phi_{l,t} + \frac{1}{2} (\phi_{l,x}^2 + \phi_{l,z}^2) + g\eta_l \right] = 0, \quad (1g)$$

$$\phi_{l,z} = 0, \quad z = -h_u - h_l. \quad (1h)$$

ここで ρ_u, h_u は上層流体の密度および水深， ρ_l, h_l は下層流体の密度および水深， $\phi_u(x, z, t)$ ， $\phi_l(x, z, t)$ は上層および下層の速度ポテンシャル， $\eta_u(x, t)$ ， $\eta_l(x, t)$ は水面および界面の変位を表す．またコンマ付きの下付き添え字はコンマ以降の変数についての偏微分係数を表す（例えば $\eta_{u,t}$ は η_u の t についての偏微分）． x は水平座標， z は鉛直上向き座標を表す． z の原点は静止水面に取り，このとき静止界面は $z = -h_u$ ，底は $z = -h_u - h_l$ にあたる．

2.2 微小振幅波・線形分散関係

支配方程式系 (1) において，水面および界面における境界条件を静止水面および静止界面のまわりに Taylor 展開したのち，境界条件中のすべての非線形項を無視して，無限小振幅の単色波列解を求めると以下のようになる：

$$\eta_u = a e^{i(kx - \omega t)}, \quad \eta_l = b e^{i(kx - \omega t)}, \quad b = \left[\cosh kh_u - \frac{gk}{\omega^2} \sinh kh_u \right] a. \quad (2a)$$

$$\phi_u = (A e^{kz} + B e^{-kz}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \phi_l = (C e^{kz} + D e^{-kz}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2b)$$

$$A = -\frac{ia}{2} \left(\frac{\omega}{k} + \frac{g}{\omega} \right) e^{-kh_u}, \quad B = \frac{ia}{2} \left(\frac{\omega}{k} - \frac{g}{\omega} \right) e^{kh_u}, \quad (2c)$$

$$C = -\frac{i\omega b}{k} \frac{e^{kh_l}}{e^{kh_l} - e^{-kh_l}}, \quad D = -\frac{i\omega b}{k} \frac{e^{-kh_l}}{e^{kh_l} - e^{-kh_l}}. \quad (2d)$$

ここで振動数 ω は以下の線形分散関係により波数 k と関係付けられる：

$$\begin{aligned} (1 + R T_u T_l) \omega^4 - g k (T_u + T_l) \omega^2 \\ + (1 - R) g^2 k^2 T_u T_l = 0, \\ T_u = \tanh k h_u, \quad T_l = \tanh k h_l, \\ R = \rho_u / \rho_l. \end{aligned} \quad (3)$$

線形分散関係は ω について複 2 次方程式であり、1 つの k に対して 4 つの解 $\pm\omega_s, \pm\omega_i$ を持つ ($\omega_s > \omega_i$)。伝播速度の速い $\pm\omega_s$ に対応するモードでは表面変位 η_u の振幅 $|a|$ が界面変位 η_l の振幅 $|b|$ より大きいので「表面波モード」、伝播速度の遅い $\pm\omega_i$ に対応するモードでは $|b|$ の方が $|a|$ より大きいので「界面波モード」と呼ぶ。添え字の \pm は伝播方向の正負に対応する。分散関係の一例として密度比 $R = 0.80$, $h_u = 1.0$, $h_l = 2.0$ の場合の分散関係 (の第 1 象限部分) を図 2 に示す。

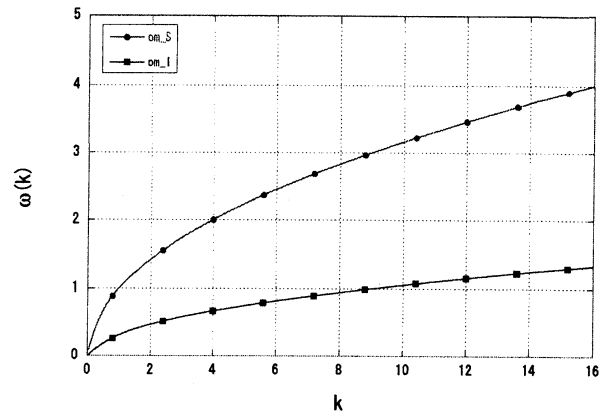


図 2: 分散関係 ($R = 0.80$, $h_u = 1.0$, $h_l = 2.0$)

2.3 3 波共鳴

2 層流体の分散関係 (3) の最も大きな特徴は、復元力として重力のみを考慮しているにもかかわらず、3 波共鳴条件

$$k_1 \pm k_2 \pm k_3 = 0 \quad \text{かつ} \quad \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0, \quad (4)$$

を満たす組が存在する点である。単層流体の場合、重力のみを考慮した表面重力波の分散関係は $\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$ で与えられるが、これには (4) を満たす解が存在せず、より高次の 4 波相互作用まで考慮しないと波列間の共鳴は起こらない。[3] ただし単層流体の場合でも、復元力として重力に加え表面張力も考慮すると、分散関係は $\omega = \sqrt{(gk + \tau k^3 / \rho) \tanh kh}$ となり、この場合には (4) を満たす波の組が存在することが知られている (τ は表面張力係数)。[4]

2 層流体系における 3 波共鳴の種類としては、反対方向に伝播する 2 つの表面波と 1 つの界面波の間の共鳴 (Class1)[1]、反対方向に伝播する 2 つの界面波と 1 つの表面波の間の共鳴 (Class2)[5]、同一方向へ伝播する 2 つの表面波と 1 つの界面波の間の共鳴 (Class3)[2] などがある。これらのうち Class3 共鳴はどのような理由からか、ごく最近まであまり研究の対象になって来なかったようである。しかし、湖沼や海洋表面に見られる波の大部分は水面上を吹く風によって作られる風成波であり、自ずとその伝播方向は風向きを中心としてあまり広くない範囲に集中している。このようにほぼ同一方向へ伝播する水面波からの非線形エネルギー輸送による界面波の生成や維持といった波動現象を想定した場合、関与する全ての波が同一方向へ伝播する Class3 共鳴は、他の共鳴に比べ、本質的に重要な役割を果たすことが予想される。このような観点から、本研究では主にこの Class3 共鳴を対象として研究を行う。

3 数値計算手法

3.1 数値計算手法

表面での速度ポテンシャル $\phi_u^S(x, t)$ および界面での速度ポテンシャル差 $\psi^I(x, t)$ を

$$\phi_u^S(x, t) \equiv \phi_u(x, \eta_u(x, t), t), \quad (5a)$$

$$\phi_u^I(x, t) \equiv \phi_u(x, -h_u + \eta_l(x, t), t), \quad \phi_l^I(x, t) \equiv \phi_u(x, -h_u + \eta_l(x, t), t), \quad (5b)$$

$$\psi^I(x, t) \equiv \phi_l^I(x, t) - R\phi_u^I(x, t). \quad (5c)$$

によって導入すると, (1) の境界条件は, $\eta_u, \phi_u^S, \eta_l, \psi^I$ に対する以下のような発展方程式に書き直することができる:

$$\eta_{u,t} = -\eta_{u,x}\phi_{u,x}^S + (1 + \eta_{u,x}^2)\phi_{u,z}, \quad z = \eta_u, \quad (6a)$$

$$\phi_{u,t}^S = -g\eta_u - \frac{1}{2}(\phi_{u,x}^S)^2 + \frac{1}{2}(1 + \eta_{u,x}^2)\phi_{u,z}^2, \quad z = \eta_u, \quad (6b)$$

$$\eta_{l,t} = -\eta_{l,x}\phi_{u,x}^I + (1 + \eta_{l,x}^2)\phi_{u,z}, \quad z = -h_u + \eta_l, \quad (6c)$$

$$\psi_{,t}^I = \frac{1}{2}[R(\phi_{u,x}^I)^2 - (\phi_{l,x}^I)^2] + \frac{1}{2}(1 + \eta_{l,x}^2)(\phi_{l,z}^2 - R\phi_{u,z}^2) - g\eta_l(1 - R), \quad z = -h_u + \eta_l. \quad (6d)$$

なおこの系は全エネルギー (位置エネルギー+運動エネルギー) をハミルトニアン, η_u, η_l を正準座標, ϕ_u^S, ψ^I を正準運動量とするハミルトン系として定式化できることが示されている. [9],[10]

現時刻の $\eta_u, \phi_u^S, \eta_l, \psi^I$ から (6) の右辺を評価して $\eta_u, \phi_u^S, \eta_l, \psi^I$ の時間微分係数を知るためには, ϕ_u, ϕ_l に対するラプラス方程式の境界値問題を解く必要がある. 本研究ではこの部分には Alam ら [6] によって開発された高次スペクトル法を採用している. この手法はもともと表面波に対して開発された手法を 2 層流体系に拡張したものである. [7],[8] 高次スペクトル法の基本的な考え方は, 静止状態での境界 (表面&界面) のまわりの Taylor 展開および速度ポテンシャルに対する振幅展開を導入することによって, 波動運動によって変形された複雑な境界形状を持つ領域における 1 つの境界値問題を, 単純な形状の領域における一連の境界値問題に帰着させて順次解いていくというものである. このため, 高次スペクトル法では, 振幅展開の打ち切り次数というパラメタの導入が必ず必要となるが, 本研究ではもっぱら 3 波共鳴相互作用に注目していることから, 振幅について 2 次の項までで打ち切っている. また 2 層流体における 3 波共鳴は, 同一方向または正反対方向へ伝播する 3 波の間で可能であるため, ここでは 1 次元伝播 (すなわち流体運動は 2 次元断面内) を仮定した. (6) の時間についての積分には 4 次精度のルンゲ・クッタ法を採用した. なお, 今後全ての数値計算において, 下層の密度 $\rho_l = 1$, 上層の水深 $h_u = 1$ および重力加速度 $g = 1$ となるように, 質量, 時間および空間を規格化して扱う.

3.2 3 波共鳴の再現

不規則波動場のスペクトル変動解析という本研究の主題に入る前に, まずプログラムの動作検証も兼ねて 3 波共鳴 (Class3) の再現を試みた. 図 3 は下層の水深 $h_l = 2$, 密度比 $R = 0.8$ の場合に, Class3 の共鳴条件

$$k_{s2} = k_{s1} \pm k_i, \quad \omega_{s2} = \omega_{s1} \pm \omega_i, \quad (7)$$

を満たす表面波モードの波数 k_{s1}, k_{s2} をプロットしたものである. この共鳴曲線上にある波数 $k_{s1} = 2.3, k_{s2} = 3.4$ に対応する 2 つの表面波モードの波列の重ね合わせを初期条件として与えた場合, それと共鳴する波数 $k_i = 1.1$ の界面波モードが生成されるかを調べた.

共鳴条件 $k_{s2} = k_{s1} + k_i$, $\omega_{s2} = \omega_{s1} + \omega_i$ を満たす2つの表面波モードおよび1つの界面波モードの表面変位 η_u の振幅をそれぞれ a_{s1} , a_{s2} , a_i とするとき, それらの時間発展は

$$\frac{da_{s1}}{dt} = i\gamma_1 a_{s2} a_i^*, \quad \frac{da_{s2}}{dt} = i\gamma_2 a_{s1} a_i, \quad \frac{da_i}{dt} = i\gamma_3 a_{s1}^* a_{s2} \quad (8)$$

によって記述される. ここでアスタリスク * は複素共役を表す. 結合係数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は (h_l, R) および (k_{s1}, k_{s2}, k_i) で決まるある実数である. これらは支配方程式系(1)の多重尺度展開, および, そこに現れる永年項を除去する条件から求めることができる. その具体的表現は非常に複雑なので省略するが, ここで対象とする $h_l = 2$, $R = 0.8$ で $k_{s1} = 2.3$, $k_{s2} = 3.4$, $k_i = 1.1$ の場合, $\gamma_1 = -10.4$, $\gamma_2 = -8.5$, $\gamma_3 = -4.7 \times 10^{-2}$ という値をとる.

(8) は, $t = 0$ で界面波モードの振幅 $a_i = 0$ の場合, ごく初期段階では $a_{s1}, a_{s2} \approx \text{const.}$, $|a_i| \sim \gamma_3 |a_{s1} a_{s2}| t$ のように振る舞うことを示唆する. 図4は実際に数値計算で得られた $|a_i|$ を t の関数として描いたものである. 期待通り $|a_i|$ が t に正比例して増大する様子を明瞭に見ることができる. 図には $a_{s1} = a_{s2} = 0.0025, 0.005, 0.01$ の3つの場合の結果を示しているが, $|a_i|$ の成長速度が $1:4:16$ の比になって $|a_{s1} a_{s2}|$ に比例すること, また定量的にも解析的に求めた γ_3 の値と大変よく一致していることも確認することができる. なお3波共鳴の方程式(8)はJacobiの楕円関数を用いて厳密に解けることが知られており, そ

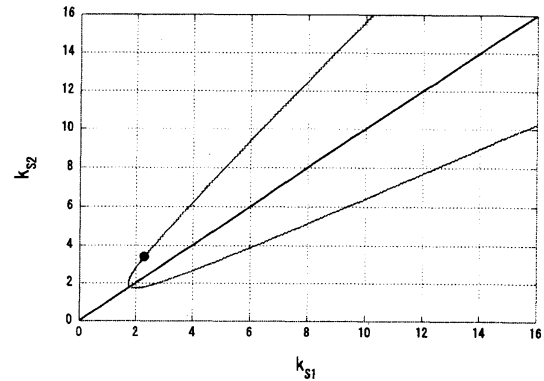


図 3: 共鳴曲線 ($R = 0.80, h_u = 1.0, h_l = 2.0$)

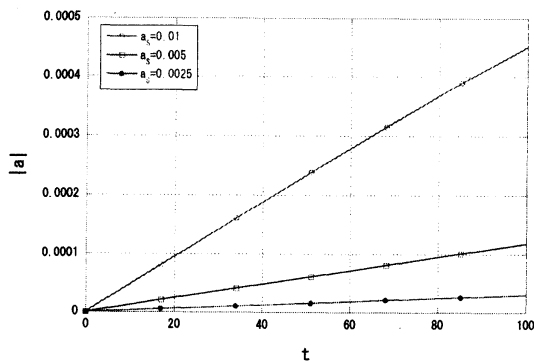


図 4: 界面波モード振幅の成長 (初期段階)

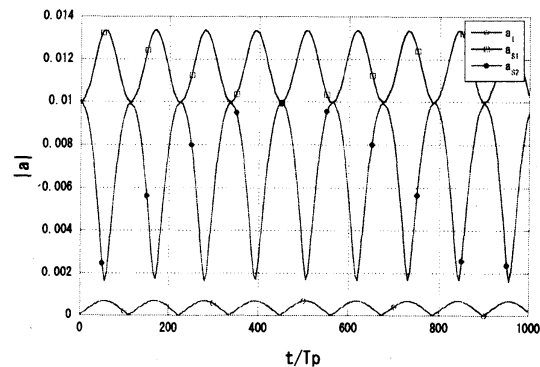


図 5: 3波の周期的なエネルギー交換 ($a_s = 0.01$)

の解は3つの波の間で周期的にエネルギーがやり取りされる様子を表現する. [4] 図5は $a_s = 0.01$ の場合のより長時間にわたる数値計算結果を示したものであり, 縦軸には各モードのエネルギーに比例する $|a|^2$ を, 横軸は k_{s1} に対応する表面波モードの周期で規格化した時間 t を示している. 期待通りの周期的な振る舞いが長時間にわたり続く様子を観察でき, ここで採用した数値アルゴリズムおよびそれに基づいて開発したシミュレーション用コードが, 長時間にわたり安定して妥当な数値解を与えることが確認できる.

4 不規則波動場に対する数値計算結果

4.1 設定

本稿では $h_l = 2$ の場合の計算結果を報告する．密度比については主に $R = 0.80$ とするが，比較のためにそれ以外の場合についても言及する．初期時刻における表面波モードおよび界面波モードのエネルギースペクトル $S_s(k)$, $S_i(k)$ は以下で与えられるものとする：

$$S_s(k) = A \left(\frac{k}{k_p} \right)^{-3} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{k}{k_p} \right)^{-2} \right] \quad (k > 0), \quad S_s(k) = 0 \quad (k < 0), \quad (9a)$$

$$S_i(k) = 0 \quad (-\infty < k < \infty), \quad A = 1.5 \times 10^{-4}, \quad k_p = 3.5 \quad (\text{i.e. } \lambda_p \approx 1.8h_u). \quad (9b)$$

すなわち初期波動場は x の正方向に伝播する表面波モードのみの重ね合わせで構成されており，界面波モードにエネルギーは存在しない． $S_s(k)$ の形は海洋波の標準的周波数スペクトルである Pierson-Moskowitz スペクトルを単層の水面重力波の分散関係 $\omega \propto \sqrt{k}$ を用いて波数スペクトルに換算したものである．数値シミュレーションでは (6) にしたがって時間発展を追跡していくために，(9) のスペクトルに対応するように $\eta_u, \phi_u^S, \eta_l, \psi^I$ の初期場を決める．スペクトルからは決まらない各波数モードの初期位相は一様乱数を用いて与えた． $h_l = 2, R = 0.8$ の場合，初期場における表面変位 $\eta_u(x)$ の r.m.s. は 1.6×10^{-2} 程度である．

数値計算では $t = 1000T_p$ 程度まで時間発展を追跡した．ここで T_p は波数 k_p の表面波モードの周期を表す．高次スペクトル法を採用していることから，直接の計算対象となるのは波数空間であり，今回の計算では $|k| \leq 35 (= 10k_p)$ を対象領域とした．実空間でのメッシュ点数は $n = 2^{18}$ で，波数空間における aliasing 誤差に影響されない独立な波数の数は $174,760 (= (n/3 - 1) \times 2)$ である．また各パラメタ設定に対して初期位相の乱数セットのみ異なる 3 個の実現を計算し，それらについての平均操作を行った．以下の議論ではエネルギースペクトルの波数解像度 Δk を $\Delta k = 0.1$ としている．幅 Δk のビンには数値シミュレーションの独立なモードが約 750 個入っており，スペクトル値はそれらの算術平均で推定している．

数値計算はすべて Dell Optiplex3010 (Intel Core i7-3770 3.4GHz) で行った． $n = 2^{18}$ の場合，1 時間キザミ ($= 4$ 次ルンゲ・クッタの 4 内部ステップ) あたりの所要時間は約 3.0 秒であった．また時間キザミを $\Delta t = T_p/100$ とした場合，1000 周期後のエネルギー保存率は約 99.7% であった．

4.2 波数スペクトルの算出

数値計算では (6) にしたがって時間発展を追跡していくために，各時刻では $\eta_u(x), \phi_u^S(x), \eta_l(x), \psi^I(x)$ が，より正確にはそれらのフーリエ係数 $\hat{\eta}_u(k), \hat{\phi}_u^S(k), \hat{\eta}_l(k), \hat{\psi}^I(k)$ が得られる．数値計算の対象は (6) にしたがって発展する非線形場であり，波の重ねあわせとして表現した場合，そこには自由波以外にそれらの非線形相互作用が生み出した束縛波成分も含まれている．しかし，場の非線形性 (\propto エネルギー密度) が十分に弱い場合には，これらの束縛波成分は自由波成分に比べ非常に小さい．もし $\eta_u(x), \phi_u^S(x), \eta_l(x), \psi^I(x)$ で規定されるある瞬間の流れ場が，線形自由波 (2) の重ね合わせで精度よく表現できることを仮定すると，「波数」 k の 4 つのフーリエ係数 $\hat{\eta}_u(k), \hat{\phi}_u^S(k), \hat{\eta}_l(k), \hat{\psi}^I(k)$ から波数 $\pm k$ の表面波モード，波数 $\pm k$ の界面波モードの 4 つの波列の振幅を確定することができる．¹

¹フーリエ係数の「波数」は，ある瞬間の空間波形を対象としたものであり，単色進行波列の波長と伝播方向を同時に表現する波数とは区別する必要がある．この意味で伝播方向の情報を含まない前者を「波数」と記した．

波数 k の線形自由波の表面変位 η_u の振幅を a_k 、界面変位 η_l の振幅を b_k とするとき (cf.(2)), この波列のエネルギー密度 E_k (単位長さあたりのエネルギー) は

$$E_k = \frac{1}{2}(\rho_l - \rho_u)gb_k^2 + \frac{1}{2}\rho_u ga_k^2 \quad (10)$$

で与えられる. このようにして, 各時刻におけるプリミティブな物理変数 $\eta_u(x)$, $\phi_u^S(x)$, $\eta_l(x)$, $\psi^I(x)$ から, 異なる波数 k およびモード (表面波 or 界面波) の各波列へのエネルギー配分を表現するスペクトル $S_s(k)$, $S_i(k)$ を算出することができる.

4.3 計算結果

図6は密度比 $R = 0.8$, 下層水深 $h_l = 2$ のときの表面波モードおよび界面波モードのスペクトルの時間発展を示したものである. 図では負方向に伝播する波列に対応する $k < 0$ の部分を示していないが, この部分は長時間にわたる時間発展後もほとんど無視できる程度に留まっている.

図6左より, 表面波モードのスペクトル $S_s(k)$ の中心が時間と共に低波数側にシフトし (ダウンシフト), エネルギーの逆カスケードが起こっている様子がみられる. しかしこのダウンシフトもスペクトルピークが $k = 2$ を超えるあたりで止まり, その後は高波数側から逆カスケードされてくるエネルギーがそこに蓄積されることによって, $k \approx 2$ あたりでどんどん突っ立っていく様子が見られる. 一方右図に示した界面波のスペクトル $S_i(k)$ では, 初期にすべての k で0であったも

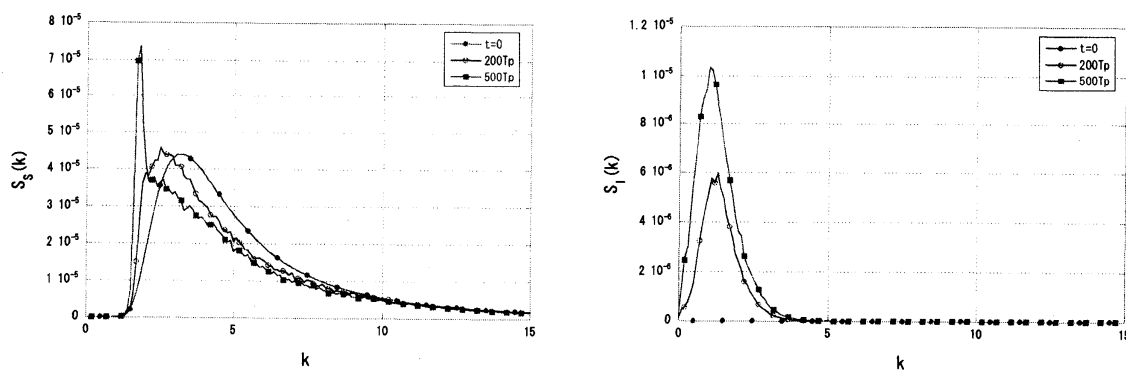


図6: スペクトルの時間発展. 左: 表面波モード, 右: 界面波モード ($h_l = 2$, $R = 0.8$)

のが, $k \approx 1$ を中心とした比較的狭い範囲で単調に増加している様子が見られる. 界面波についても負方向に伝播する成分はほとんど成長が見られず, 表面波モードとも併せて, 波動場は正方向に伝播する波列のみでほぼ構成されている. これら同一方向に進行する波列間のエネルギー交換を実現する3波共鳴はClass3共鳴のみであり, 今回初期にエネルギーを持たなかったこれらの界面波モードを励起した機構はこのClass3共鳴に他ならない.

図7は $R = 0.8$, $h_l = 2$ のときに, Class3の共鳴条件を満足する2つの表面波モードの波数を示したものである. 参考までにより密度差が小さい $R = 0.94$ の場合も示した. これによると $R = 0.8$, $h_l = 2$ の場合, Class3の共鳴に参加できる表面波モードの波数 k_s は $k_s > 1.79$ に限られることが分かる. スペクトル変動をもたらすのは共鳴相互作用であることは波動乱流理論においてよく知られたことであり, $k_s < 1.79$ の表面波モードに対しては共鳴条件を満たす相手となる表面波, 界面波が存在しないという事実が, 図6で見られた表面波モードスペクトル $S_s(k)$ の低下が $k \approx 2$ あたりで停止したという結果と対応しているものと考えられる. それ以下ではClass3の3波共鳴が実現しないような表面波の波数を「共鳴限界波数」と呼び, k_{crit} と記すことにする. k_{crit} 近傍では

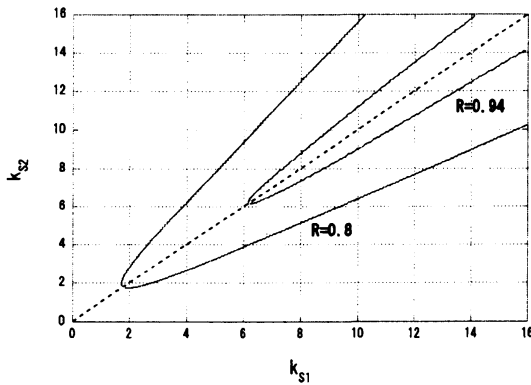


図 7: 共鳴曲線 ($h_l = 2$, $R = 0.80, 0.94$)

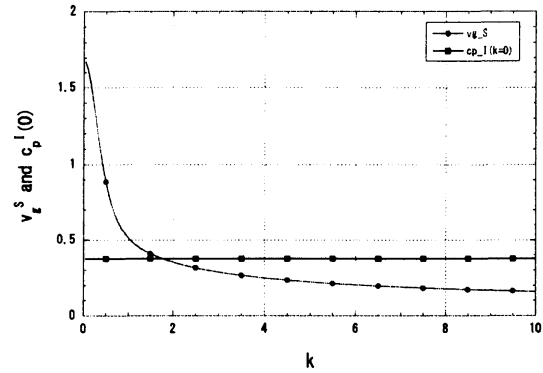


図 8: 表面波の群速度と界面波の位相速度 ($h_l = 2$, $R = 0.8$)

k_{s1} と k_{s2} の差は非常に小さくなる. $k_{s2} = k_{s1} + \Delta k$ と書くと, Class3 の共鳴条件 $k_{s2} = k_{s1} + k_i$ より $k_i = \Delta k$, またこのとき振動数の共鳴条件 $\omega_{s2} = \omega_{s1} + \omega_i$ より, 共鳴限界波数 k_{crit} に対応する $\Delta k \rightarrow 0$ の極限では

$$\frac{d\omega_S(k)}{dk} = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\omega_I(\Delta k)}{\Delta k}, \quad (11)$$

が成り立つ. これは表面波 (短波) の群速度と界面波 (長波) の位相速度 (の長波極限) が一致することを要求している. なお 3 波共鳴のこの特別なタイプは, 「長波短波相互作用」として従来からよく知られている. 図 8 は $R = 0.8$, $h_l = 2$ の場合の, 表面波モードの群速度および界面波モードの位相速度の長波極限を示している. 2 本の曲線の交点が $k_{\text{crit}} = 1.79$ にあたる.

図 7 に示した $R = 0.94$, $h_l = 2$ に対する共鳴曲線によると, この場合の共鳴限界波数は $k_{\text{crit}} = 6.17$ である. 初期スペクトル (9) のかなりの部分が共鳴可能領域からはずれ, そのためスペクトル変動がかなり抑制されることが予想される. 図 9 はこの場合の数値計算から得られた表面波モードのスペクトル $S_s(k)$ の時間発展を示したものであるが, 500 周期の間に $k_{\text{crit}} \approx 6$ を挟んで僅かなスペクトル変化は見られるものの, 図 6(左) に示した $R = 0.8$ の場合に比べ, 初期スペクトルからの変化が大幅に抑制されていることが分かる.

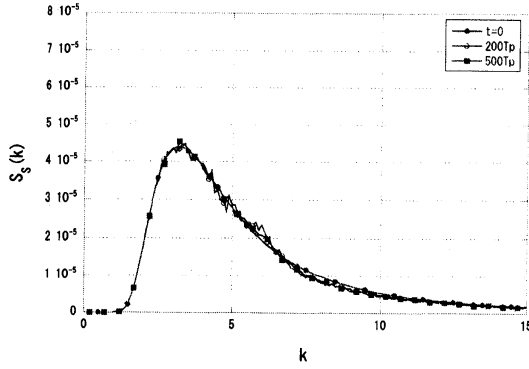
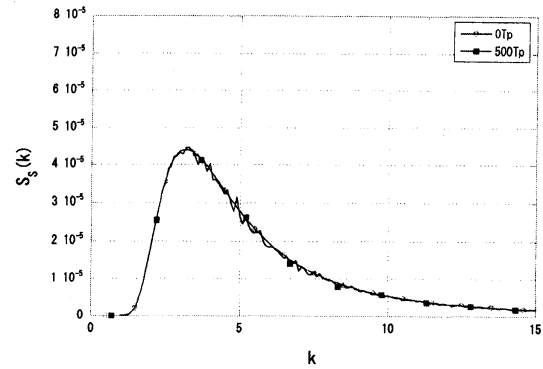
参考までに, 同じプログラムで $R = 1.0$, すなわち上層と下層の密度が等しく密度界面が存在しない場合についても計算を行った. 図 10 はそのときの $t = 0$ と $t = 500T_p$ の $S_s(k)$ を示したものである. この場合は実質的には単層流体の表面重力波であり, 3 波共鳴が許されない. この事実を反映して, 500 周期が経過した後も, スペクトルが初期形状のまま留まっていることが確認できる.

5 まとめと議論

5.1 まとめ

本研究の結果は以下のようにまとめることができる.

- 2 層流体系における波動現象を模擬する直接数値計算用プログラムを構築した. 速度ポテンシャルに対する Laplace 方程式の境界値問題の解法には高次スペクトル法を採用した. 空間的には断面 2 次元 (1 次元伝播) を仮定し, 2 次の非線形性 (3 波相互作用) まで考慮した.

図 9: $S_s(k)$ の時間発展 ($R = 0.94$, $h_l = 2$)図 10: $S_s(k)$ の時間発展 ($R = 1.0$, $h_l = 2$)

- 開発した数値コードの妥当性の確認として、Class3 の 3 波共鳴の再現実験を行った。その結果、2 つの表面波を入力した場合、それらと共鳴する 1 つの界面波が自発的に生成されることを確認した。またその成長率が、多重尺度法を用いて解析的に導出した共鳴する 3 波の複素振幅を支配する常微分方程式 (8) からの理論的予測と定量的に非常に良い一致を示すことを確認した。
- 初期条件として連続スペクトルを有する表面波モードのみからなる不規則波動場を採用したところ、表面波モードスペクトル $S_s(k)$ においてはピーク波数が時間と共に低下し、活発なエネルギーの逆カスケードが観察された。今回採用したスペクトル形に関しては、高波数へのカスケードアップは観察されなかった。 $S_s(k)$ のピーク波数の低下は、それ以下では共鳴相互作用が不可能となる「共鳴限界波数」 k_{crit} あたりで止まることを確認した。スペクトルピークのダウンシフトの停止と、それ以降も続く高波数域からのエネルギー逆カスケードのために、 k_{crit} 付近ではエネルギースペクトルの先鋭化が見られた。
- 界面波モードについては、どのケースにおいても $k \approx 1$ 近辺の比較的狭い低波数域においてスペクトル $S_i(k)$ の単調な増大が見られた。本研究では、初期には界面波モードにエネルギーを与えておらず、この界面波モードの生成・増大は、もっぱら Class3 共鳴による表面波モードからのエネルギー輸送によってもたらされたものである。
- 今回採用したパラメタの場合、時間と共に表面波モードから界面波モードにエネルギーが輸送されるものの、1000 周期が経過した後でも、界面波モードの持つエネルギーの総量は表面波モードのその 10 % 弱に過ぎない。しかしこの界面波モードの存在が、表面波モードのスペクトルを大きく変化させる。図 10 で示したように、もし密度界面がなく界面波モードの存在が許されなければ、表面波のスペクトルは全く変化することができない。このことを考えると、表面波スペクトルの変動に対する界面波モードの重要性は、エネルギー配分量の比率では測ることのできない大きなものであると言える。

5.2 議論と今後の課題

表面波モードのスペクトル内では低波数に向かってエネルギーカスケードが起こり、それに伴ってスペクトル $S_s(k)$ が低波数側にダウンシフトする様子を図 6 に示した。またそのダウンシフトが Class3 共鳴に対する共鳴限界波数 k_{crit} の付近で止まることも確認した。図 11 はそのときのスペ

クトルピーク波数の時間変化を示したものである。ピーク波数が初期の数 100 周期の間は急速にダウシフトし、それが次第に緩和していく様子を見ることができる。このパラメタ設定 ($h_l = 2$, $R = 0.8$) の場合、 $k_{\text{crit}} = 1.79$ であるが、ピーク波数は明らかに k_{crit} を越えて低下している。

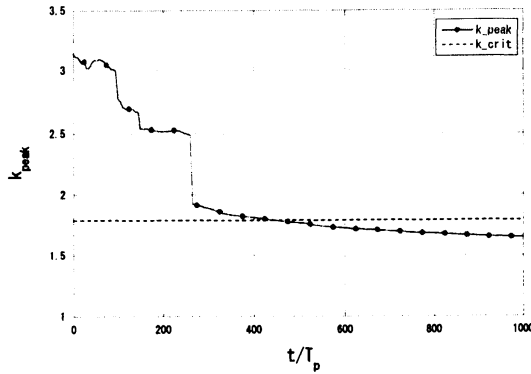


図 11: スペクトルピークの時間変化

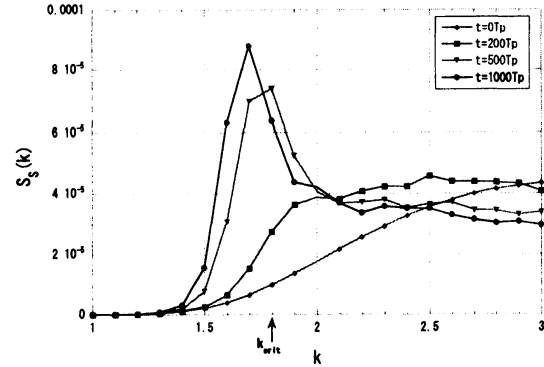


図 12: k_{crit} 近傍の $S_s(k)$ の時間変化 ($R = 0.8$)

波動乱流の標準理論によると、スペクトル変動は一般に共鳴相互作用によってのみもたらされ、したがって共鳴関係を満たす相手のない k_{crit} 以下の波数においては、スペクトルは変化しないはずである。しかし図 11 に示した数値結果を見ると、 $S_s(k)$ のピークは明らかに k_{crit} を越えて低波数側にシフトしている。また図 12 はこのときの $S_s(k)$ の変化を k_{crit} の周辺部分だけ拡大して示したものであるが、 k_{crit} より低波数領域においてもスペクトル $S_s(k)$ が大きく変化している様子が見られる。このような現象が起こる原因については現時点では不明であり、(1) 微小振幅波に基づいた波動スペクトルの算出方法の妥当性、(2) Class3 以外の 3 波共鳴の関与の可能性、(3) 3 波共鳴以外 (例えば非共鳴 3 波 \times 非共鳴 3 波の 4 波相互作用) によるスペクトル変化の可能性、などについて今後注意深く検討する必要がある。

その他にも今後検討を要する点として以下のようなものがあげられる：

1. $S_s(k)$ のスペクトルピークの低下が k_{crit} 近傍で止まった後、その周辺に高波数域から逆カスケードされてきたエネルギーが蓄積して、 k_{crit} 周辺でスペクトルが次第に先鋭化していくことが観察された。このエネルギーの集中、スペクトルの先鋭化がより長時間の後にどのように進展していくのか明らかにする必要がある。ある時点で界面波モードスペクトルとの間に何らかのバランスが生じ、準平衡的な状態が実現するのか、それとも k_{crit} 周辺へのエネルギー集中がより一層進むのか、またその場合、実空間において何らかのコヒーレントな構造が出現する可能性があるのか、など検討すべき点は多い。
2. 波動乱流理論によると、Class3 共鳴が卓越する場合、 $S_s(k)$ および $S_i(k)$ の発展を支配する kinetic equation は

$$\begin{aligned} \frac{dS_s(k)}{dt} = & \iint \left[U^{(1)} S_{s1} S_{i2} - U^{(2)} S_{s0} S_{i2} - U^{(3)} S_{s0} S_{s1} \right] \delta_{s0-s1-i2}^k \delta_{s0-s1-i2}^\omega dk_{1,2}, \\ & - \iint \left[V^{(1)} S_{s0} S_{i2} - V^{(2)} S_{s1} S_{i2} - V^{(3)} S_{s0} S_{s1} \right] \delta_{s0-s1+i2}^k \delta_{s0-s1+i2}^\omega dk_{1,2}, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\frac{dS_i(k)}{dt} = \iint \left[W^{(1)} S_{i0} S_{s2} - W^{(2)} S_{s1} S_{i0} - W^{(3)} S_{s1} S_{s2} \right] \delta_{i0-s1+s2}^k \delta_{i0-s1+s2}^\omega dk_{1,2}, \quad (12b)$$

のような形になることが予想される。ここで積分核 U, V, W は k, k_1, k_2 のある関数であるが、計算の複雑さのために我々はまだこれらに対する解析的表現を得るに至っていない。今

後 kinetic equation を導出し、それに基づいたスペクトル変動予測を行って、今回の直接数値計算の結果と比較検討する必要がある。なお、(12)に含まれる2つの δ 関数のために、波数 k における $S_S(k)$, $S_I(k)$ の時間変化に影響するのは k と共鳴する波数のみであるが、これら共鳴3波の組に限れば、積分核 U , V , W の値は振幅方程式(8)の結合係数 γ_i から知ることが可能である。

なお、1つの表面波モードと共鳴するのは別の1つの表面波と1つの界面波であるという事実、またそれを反映した決定論的な振幅方程式(4)から考えるとやや意外かも知れないが、表面波モードスペクトル $S_s(k)$ の時間変化率(12)には $S_s \times S_i$ の項だけでなく、あたかも表面波同士で3波共鳴が存在するような、 $S_s \times S_s$ の項も存在する。まだ界面波モードがほとんど励起されていない初期段階において、表面波モードスペクトル $S_s(k)$ が全体として滑らかな形状を保ったまま、時間と共にダウンシフトしていくのは主にこの項の寄与によるものと思われる。一方、ある程度時間が経過して界面波が成長した後は次第に $S_s \times S_i$ という形の項の寄与が強まり、それが S_i スペクトルの狭帯域性を反映して、 k_{crit} 周辺に限定されたピーキーなスペクトル変動をもたらしているのではないかと想像される。このような描像の妥当性の検証は、kinetic equationに基づくスペクトル変動解析の結果を待たざるを得ない。

3. 今回の計算の結果は、パラメタの設定如何では、たとえ界面波へのエネルギーの総輸送量がそれほど大きくなくても、「共鳴可能な界面波が存在し得る」という事実そのものが「触媒」となって、表面波スペクトルに非常に大きな変動をもたらし得ることを示唆している。通常行われている海洋波浪の数値予測においては、水は単層流体として扱われ、したがってスペクトル変動の基本的なメカニズムは、表面波間の4波共鳴相互作用だと考えられている。もし低緯度海域における温度躍層のように密度界面が存在する場合、現実的なパラメタ設定のもとで、この界面の存在が表面波のスペクトル変動に果たしてどの程度の寄与をもたらし得るであろうか。今後の検討を要する。

参考文献

- [1] Ball, D.K. 1964 Energy transfer between external and internal gravity waves, J. Fluid Mech. **19**, 465–478.
- [2] Alam, M.-R. 2012 A new triad resonance between co-propagating surface and interfacial waves, J. Fluid Mech. **691**, 267–278.
- [3] Phillips, O.M. 1960 On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude, Part I, J. Fluid Mech. **9**, 193–217.
- [4] McGoldrick, R.F. 1965 Resonant interactions among capillary-gravity waves, J. Fluid Mech. **21**, 3055–331.
- [5] Wen, F. 1995 Resonant generation of internal waves on the soft sea bed by a surface wave, Phys. Fluids **7**, 1915–1922.
- [6] Alam, M.-R., Liu, Y. & Yue, D.K.P. 2009 Bragg resonance of waves in a two-layer fluid propagating over bottom ripples. Part II. Numerical simulation, J. Fluid Mech. **624**, 225–253.

- [7] Dommermuth, D.G. & Yue, D.K.P. 1987 A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **184**, 267–288.
- [8] West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R.S., Milder, M. & Milton, R.L. 1987 A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.*, **92**, 11,803–11,824.
- [9] Ambrosi, D. 2000 Hamiltonian formulation for surface waves in a layered fluid, *Wave Motion* **31**, 71–76.
- [10] 原謙介, 高原弘樹 2007 Hamiltonian を用いた容器内二層流体の液面揺動 (第 1 報, 正準運動方程式の導出と線形解析) 日本機械学会論文集 (C 編) **73**, 2217–2224.
- [11] Zakharov, V.E., L'vov, V.S. & Falkovich, G. 1992 *Kolmogorov Spectra of Turbulence I - Wave Turbulence*, Springer.
- [12] Nazarenko, S. 2011 *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics 825, Springer.